UNE REPRÉSENTATION GRAPHIQUE DES POINTS CYCLIQUES DU PLAN

PREMIER CHAPITRE DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE VECTORIELLE

PAR C. C. DASSEN
Docteur ès sciences (1)

17

RÉSUMÉ

Une représentation graphique des points cycliques du plan. — L'auteur, après des considerations préliminaires, indique une représentation graphique, peut être nouvelle, de la circonférence analytique, en supposant des abscisses algébriques au sens strict, et des ordonnées vectorielles. La courbe obtenue se compose d'une circonférence ordinaire du plan de base et d'une hyperbole equilatère du plan perpendiculaire a ce dernier et parallèle a l'axe des abscisses par le centre de la circonférence. Au moyen de cette représentation on peut mettre en évidence, graphiquement, les propiétés des points cycliques et des droites isotropes, propiétés qui ont un aspect paradoxal en géométrie synthètique. L'auteur étudie, de même, les représentations relatives aux coniques analytiques en general. Le travail n'est qu'un premier chapitre d'une géométrie analytique vectorielle. D'autres chapitres suivront.

PRÉFACE

Dans notre *Étude sur les Quantités mathématiques* (2), nous avons analysé le concept de quantité mathématique, soit isolé, soit combiné avec celui de direction. Après avoir, en arithmétique, défini les opé-

(1) Étude présentée à l'Académie Nationale des Sciences Exactes, Physiques et Naturelles de Buenos Aires le 22 juin 1925, l'auteur étant récipiendaire. Comme ce dernier croit que, dans l'Argentine, il convient, avant tout, de faire en mathématiques une œuvre de vulgarisation, ses travaux seront toujours publiés de façon a être compris d'un plus grand nombre de lecteurs en les exposant, autant que faire se pourra, sous une forme élémentaire.

(2) A. Hermann, Paris, 1903.

rations « directes », la considération des opérations « inverses » se présente aussitót, mais alors, des cas d'impossibilité se produisent (à commencer par la soustraction). Les opérations relatives aux grandeurs dirigées dans deux sens opposés étant établies, ces cas de soustractions impossibles n'existent plus, mais, en revanche, il s'en présente d'autres qui, à leur tour, deviennent possibles si l'on généralise la question en considérant des grandeurs dirigées dans un plan, etc. C'est le point de vue géométrique de Wessel, Argand, Français, Gompertz, Mourey, Warren, Gauss, Cauchy, etc.

La difficulté n'en résulte pas, cependant, tout à fait écartée ainsi. Par exemple, en géométrie analytique, on manipule des symboles qui, d'après des bases établies pour cette science, n'ont plus de sens dans les cas considérés plus haut; or, il arrive parfois que ces maniements de symboles depourvus ainsi de sens, aboutissent à des résultats qui, eux, en ont par hasard un. Quelle solidité peut-on donner alors à ces derniers ? Le génie d'un Gauss, d'un Euler, d'un Cauchy, d'un Lagrange, d'un Poncelet, doué comme il est d'une merveilleuse faculté naturelle qui lui sert de guide et de devinement, pourra tirer parti, sans s'égarer, de pareils jeux de symboles. Mais cela n'arrivera pas au commun des mortels, et, du reste, ni les mathématiciens que nous venons de nommer, ni Leibnitz, ni J. Bernouilli, ni Abel, ni aucun autre de ceux qui firent un si remarquable usage des quantités « imaginaires » n'ont donné un fondement quelconque à l'emploi de pareilles expressions dépourvues de sens dans le domaine où elles ont été employées. Ils se sont, tout au plus, limité à tâcher de justifier cet emploi en invoquant de vagues analogies, ainsi que les concordances des résultats obtenus moyennant l'application inconsciente du *Principe de la conservation des lois du calcul algébrique.*

C'est justement a cette époque que d'Alembert a dit : *Suivez en avant et la foi vous viendra ;* et c'était bien en effet une œuvre de foi que de justifier un semblable maniement de symboles, par l'invocation d'une prétendue *Généralité de l'Analyse*, suivant une phrase de Lagrange; ou par celui d'un *Principe de Continuité*, d'après Poncelet.

Je préciserai mon idée par un exemple. L'équation $x^2 + y^2 = r^2$, de la circonférence, correspond, dans le domaine strictement algébrique, à la courbe tracée par un compas, car, comme dans ce domaine les racines carrées de quantités négatives sont des non-sens, x et y ne peuvent éxister ensemble (dans l'équation en question), que pour des valeurs convenables de l'une et de l'autre, comprises entre $+ r$ et $-r$. Dire alors que toutes les équations de cette courbe sont satisfaites pour les valeurs : $x = \infty$, $y = i\infty$; definir, en conséquence, deux points « cycliques », communs à toutes les circonférences d'un plan ; definir ensuite des « droites isotropes », unissant les centres de ces circonférences avec les deux points communs en question ; ajouter que ces droites forment des angles égaux avec une droite quelconque du plan ; dire que la distance de deux points de ces droites isotropes sont toujours nulles, etc., c'est, pour le domaine algébrique, employer un langage insensé, fantastique et même monstrueux. Mais, si pour y échapper, on considère l'équation dans le domaine vectoriel plan, on ne distingue pas aisément la manière d'interpréter le sens graphique de l'équation.

Nous nous proposons d'examiner les principales questions de cette nature, en cherchant toujours, tant que faire se pourra, une interprétation concrète ou graphique.

Nous entendrons, en même temps, terminer ainsi notre œuvre de vulgarisation, commencée depuis voilà déjà plus de vingt années, mais que des obligations plus pressantes, nous avaient presque aussitôt obligé d'interrompre.

I

GÉOMÉTRIE VECTORIELLE A DEUX VARIABLES

1. Avant de faire une plus grande généralisation, je vais sur le champ étudier le cas, indiqué dans la préface, relatif aux « points cycliques » du plan.

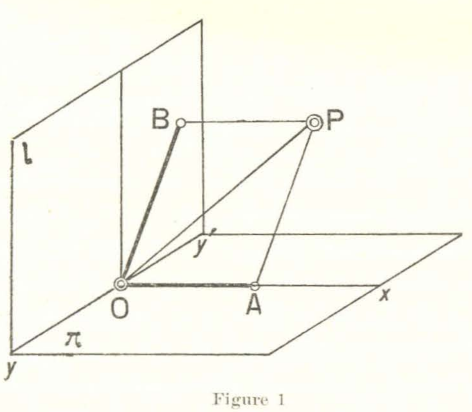

Figure 1

Soit π un plan que je nommerai *plan de base ;* j'y suppose déterminé des axes cartésiens orthogonaux de la géométrie analytique ordinaire. La variable indépendante ou *argument, x,* ne prendra, dans ce qui suit, que des valeurs algébriques au sens strict du mot (valeurs *réelles*, positives ou négatives) mais nous admettrons que la *fonction, y,* soit un vecteur dirigé dans le plan ι, perpendiculaire au plan de base π, par l'axe de y (fig. 1) (Oy, direction positive, Oy', direction négative). A chaque valeur de x et de y, on peut, alors, faire correspondre un point P, qui est l'extrémité du vecteur $x + y$ (d'après la loi du parallélogramme de composition des vecteurs). Et réciproquement, au point P, il ne peut que correspondre une valeur réelle de x et une vectorielle de y, lesquelles s'obtiennent en considérant le plan qui contient P, et qui est perpendiculaire a l'axe Ox : le pied A de ce plan sur Ox, détermine la valeur OA de x ; et alors le vecteur OB « équipollent » de AP, par O, est le vecteur y.

2. Pour la détermination de y, nous considérerons les quatre vecteurs unitaires $+1$, -1, $+i$, $-i$, orientés dans le plan ι (voyez fig. 2). Si c est le vecteur projection de y sur l'axe yy', et si d est la projection de y sur l'axe perpendiculaire à l'antérieur, nous savons que

$$y = c + di$$

c et d étant algébriques (réels) sur les axes respectifs (1).

Cette convention étant établie, retournons à l'expression

$$x^2 + y^2 = r^2$$

dans laquelle r a le caractère d'un paramètre (réel) et examinons quel peut être le lieu des points qui ont pour projections les extrémités des vecteurs x et y qui se correspondent dans cette détermination (une des projections doit être faite sur l'axe des x, l'autre sur le plan ι).

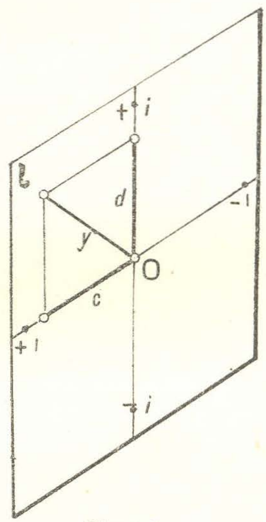

Figure 2

Nous avons d'abord :

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2}.$$

3. Quel que soit x (réel), on obtient toujours pour y deux valeurs égales et de signes contraires (opposés); si x est compris entre $+r$ et $-r$, les valeurs de y sont dirigées suivant l'axe des yy' (verseurs 0° et 180°). Au cas contraire, ils le sont suivant l'axe perpendiculaire au précédent par O (verseurs de 90° et de 270°). Le tenseur est, dans le premier cas, $\sqrt{r^2 - x^2}$; il est $\sqrt{x^2 - r^2}$ dans le second cas. Si z est le valeur arithmétique de ce tenseur, nous aurons, dans le premier cas :

$$z^2 = r^2 - x^2;$$

(1) Voyez, pour le calcul vectoriel plan, notre *Étude sur les Quantités mathématiques. Grandeurs dirigées. Quaternions.*

est dans le deuxième

$$z^2 = x^2 - r^2.$$

C'est-à-dire,

$$x^2 + z^2 = r^2$$

$$x^2 - z^2 = r^2,$$

équations respectivement d'une circonférence de rayon r et d'une hiperbole equilatère de demi axes de longueurs r.

4. Le lieu cherché s'obtient, comme il a été indiqué, en faisant la

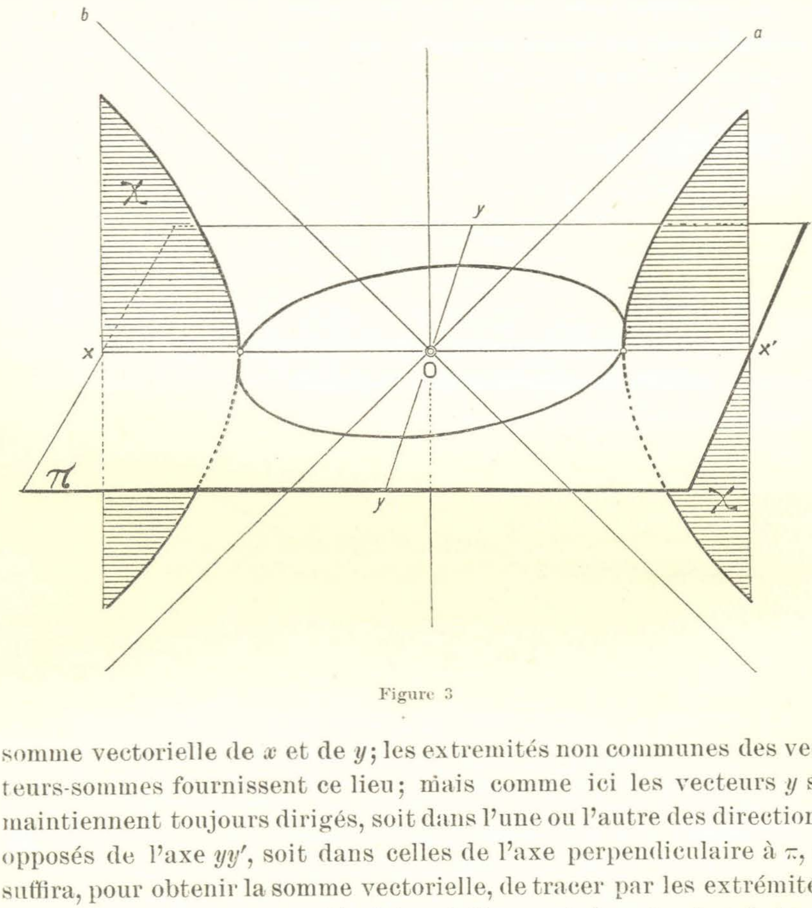

Figure 3

somme vectorielle de x et de y; les extremités non communes des vecteurs-sommes fournissent ce lieu; mais comme ici les vecteurs y se maintiennent toujours dirigés, soit dans l'une ou l'autre des directions opposés de l'axe yy', soit dans celles de l'axe perpendiculaire à π, il suffira, pour obtenir la somme vectorielle, de tracer par les extrémités des vecteurs x, des perpendiculaires à l'axe xx', dans le plan de base π quant x est compris entre $+r$ et $-r$; et dans le plan χ, perpendiculaire à celui de base, par xx', pour les autres valeurs de x. Les ordonnées prises sur ces perpendiculaires doivent être égales aux valeurs correspondentes du tenseur z de y. On obtient ainsi le lieu cherché, qui se trouve être constitué par une circonférence de rayon r et de centre O appartenant au plan de base π, et par une hyperbole equilatère de demi axes r située dans le plan χ (fig. 3). Si $r = 0$, la circonférence se reduit au point O, et l'hyperbole aux droites a et b du plan χ passant par O, et inclinées à 45° sur xx'.

5. Nous avons supposé que les axes son orthogonaux et nous continuerons a les supposer ainsi jusqu'à nouvel ordre, mais si l'origine ne coïncidait pas avec le centre de la circonférence, nous aurions l'équation

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$$

m et n étant les coordonnées (réelles) du centre.

En répétant dans ce cas le raisonnement fait pour le cas antérieur, on a, comme lieu, la même figure antérieur, l'hyperbole se trouvant dans le plan χ perpendiculaire au plan de base, par la droite parallèle à l'axe xx' qui passe par le centre de la circonférence; d'où il résulte que, pour une circonférence donnée, la position de cette hyperbole ne dépend que de la direction de l'axe xx'.

6. Nous aboutirions au même résultat en soumettant l'équation générale à une transformation générale de coordonnées, c'est-à-dire, en remplaçant x et y respectivement par

$$x \cos \theta - y \sin \theta - m, \qquad x \sin \theta + y \cos \theta - n.$$

7. Si au lieu d'une circonférence il s'agissait d'une ellipse de demi axes a et b $(a > b)$ nous aurions, en plaçant l'origine des coordonnées à son centre O, l'axe des x contenant a :

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$$

Reprenant le raisonnement fait pour le cercle, on trouvera comme lieu : l'ellipse courante du plan de base, c'est-à-dire celle que trace un ellipsographe, et l'hyperbole

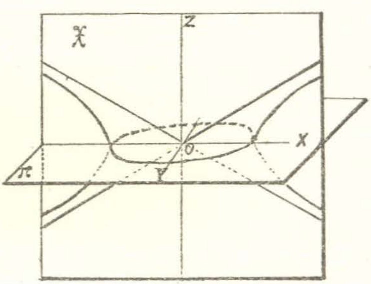

Figure 4

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

située dans le plan χ perpendiculaire au plan π par xx', et dont les demi axes sont : a (sur xx'), commun avec l'ellipse de π, et b, perpendiculaire à π par O, ainsi que l'indique le figure 4.

Mais, à présent, un changement de coordonnées donnera lieu à d'importantes variations.

8. Faisons tourner l'axe xx' autour de l'origine, d'un angle θ. Nous aurons :

$$b^2 (x \cos\theta - y \sin\theta)^2 + a^2 (x \sin\theta + y \cos\theta)^2 = a^2b^2;$$

$$(b^2 \sin^2\theta + a^2 \cos^2\theta) y^2 + 2 [(a^2 - b^2) \sin\theta \cos\theta] xy +$$
$$- (b^2 \cos^2\theta + a^2 \sin^2\theta) x^2 - a^2b^2 = 0.$$

Donc, en résolvant cette équation, et après quelques réductions :

$$y = \frac{- x \sin\theta \cos\theta (a^2 - b^2) \pm ab\sqrt{- x^2 + (b^2 \sin^2\theta + a^2 \cos^2\theta)}}{b^2 \sin^2\theta + a^2 \cos^2\theta}. \quad (1)$$

C'est-à-dire que, pour chaque valeur de x (réelle), le vecteur y est la somme des deux vecteurs y_1 et y_2, a savoir :

$$y_1 = \frac{- x \sin\theta \cos\theta (a^2 - b^2)}{b^2 \sin^2\theta + a^2 \cos^2\theta} \quad (a)$$

(du plan de base),

$$y_2 = \pm \frac{ab\sqrt{- x^2 + (b^2 \sin^2\theta + a^2 \cos^2\theta)}}{b^2 \sin^2\theta + a^2 \cos^2\theta}, \quad (b)$$

qui appartiendra au plan de base quand

$$x^2 < b^2 \sin^2\theta + a^2 \cos^2\theta$$

et au plan χ, dans le cas contraire.

9. Pour $x = \pm \sqrt{b^2 \sin^2\theta + a^2 \cos^2\theta} = \pm \sqrt{k}$, qui correspond à l'évanouissement du discriminant de l'équation, le vecteur y_2 disparait. Le lieu (a) est une droite r de π qui passe par l'origine et dont le coéfficient angulaire est :

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{- \sin\theta \cos\theta (a^2 - b^2)}{b^2 \sin^2\theta + a^2 \cos^2\theta} = - \frac{l}{k}.$$

Il convient de trouver les coordonnées x_0, y_0, du point qui correspond à l'évanouissement du vecteur y_2. Nous avons vu que $x_0 = \pm \sqrt{k}$. Pour trouver y_0 il suffit de remplaçer en (1) cette valeur de x_0. On obtient :

$$y_0 = \pm \frac{l}{\sqrt{k}}.$$

10. La figure 5 représente l'ellipse, les axes des coordonnées, la droite r. Les segments relatifs à x_0 et y_0 sont $\pm\overline{OR}$, $\pm\overline{RT}$. Nous avons vu que $x_0 = \pm\overline{OR} = \pm\sqrt{k}$. Cette valeur de k peut être obtenue graphiquement ainsi : Si A et B représentent les extrémités du grand axe, et du petit axe de l'ellipse, en les projetant orthogonale-

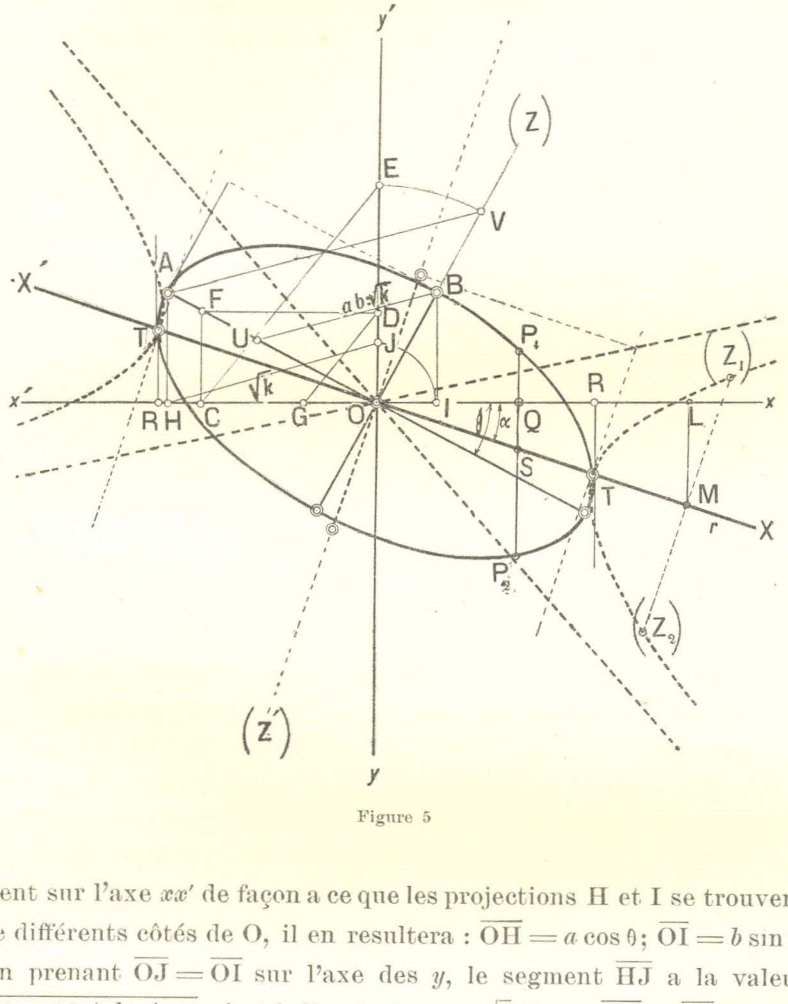

Figure 5

ment sur l'axe xx' de façon a ce que les projections H et I se trouvent de différents côtés de O, il en resultera : $\overline{OH} = a\cos\theta$; $\overline{OI} = b\sin\theta$. En prenant $\overline{OJ} = \overline{OI}$ sur l'axe des y, le segment $\overline{HJ}$ a la valeur $\sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}$, c'est-à-dire, justement, $\sqrt{k}$. Donc, $\overline{OR} = \overline{HJ}$. Quant à l'ordonnée correspondante de x_0, qui, pour cette valeur $\pm\sqrt{k}$, se compose uniquement du vecteur (a), soit $\overline{RT} = \pm\dfrac{l}{\sqrt{k}}$, on peut l'obtenir graphiquement en cherchant un foyer F de l'ellipse; on a alors, $\overline{OF}^2 = a^2 - b^2 = c^2$. Donc :

$$l = \sin\theta\cos\theta\,(a^2 - b^2) = c \,.\, \sin\theta \,.\, c \,.\, \cos\,.\,\theta.$$

Cette expression représente l'aire du rectangle construit sur les segments $\overline{FC}$ et $\overline{FD}$, abscisse et ordonnée du foyer F. Il suffit, par conséquent, de considérer sur l'axe des y le segment $\overline{OE} = \overline{HJ} = \sqrt{k}$; de joindre ensuite E et C, et de tracer, par D, la parallèle DG a EC; on obtient ainsi le segment $\overline{OG} = \frac{l}{\sqrt{k}}$.

11. Il s'en suit que les points singuliers T s'obtiennent aisément en prenant $\overline{OR} = \overline{HJ}$, et $\overline{RT} = \overline{OG}$. Le carré de l'hypoténuse $\overline{OT}$, du triangle PRT, a pour valeur :

$$\frac{k^2 + l^2}{k} = \frac{a^4\cos^2\theta + b^4\sin^2\theta}{b^2\sin^2\theta + a^2\cos^2\theta}.$$

Les points T sont évidemment ceux de contact des tangentes à l'ellipse parallèles a l'axe yy'; $\overline{OT}$ est le demi-diamètre conjugué de cette direction. Pour une valeur de x moindre que $\overline{OR}$, par exemple pour $x = \overline{OQ}$ (voyez le figure 5), le discriminant de l'équation est positif et les points P_1, P_2, correspondants de la courbe, s'obtiennent en ajoutant à l'ordonnée $\overline{OS}$, correspondante de la droite r, c'est-à-dire au vecteur (a) les deux segments égaux et de signes contraires $\overline{SP_1}$ et $\overline{SP_2}$ du vecteur (b), deuxième composante de y. Pour une valeur de $x > \overline{OR}$, le discriminant est négatif, et les deux valeurs du vecteur (b) doivent se prendre perpendiculairement au plan π de base par le point M de r. Il est aisé de se rendre compte que le lieu ainsi obtenu est une hyperbole de demi axe réel $\overline{OT}$. Considerons, par exemple, le valeur $\overline{OL} > \overline{OR}$ de x (fig. 5). Le vecteur (a) est toujours celui, $\overline{OM}$, qui correspond à la droite r; il faudra donc tracer par M la perpendiculaire au plan du papier (plan π de base) et prendre d'un côté et de l'autre, un segment $\overline{MZ}$ de longueur égale au tenseur de (b). La courbe ainsi obtenue dans le plan perpendiculaire à celui du papier, par r, aura donc cette droite comme axe de symétrie, et pour constater qu'il s'agit en effet d'une hyperbole on peut la référer à la paire d'axes orthogonaux d'origine O, celui des X coïncidant avec r et l'autre, que nous dirons, axe des Z, perpendiculaire au plan de base par O. On a alors, X et Z désignant les coordonnées d'un point de cette courbe.

$$X^2 = \overline{OL}^2 + \overline{LM}^2 = x^2 + \frac{x^2 l^2}{k^2} = x^2 \frac{k^2 + l^2}{k^2} = x^2 \frac{a^4 \cos^2 \theta + b^4 \sin^2 \theta}{k^2}$$

$\therefore$

$$x^2 = X^2 \frac{k^2}{q}$$

en posant, pour abrégér,

$$q = a^4 \cos^2 \theta + b^4 \sin^2 \theta$$

$$Z = \pm \frac{ab\sqrt{x^2 - k}}{k} \quad \therefore \quad Z^2 = \frac{a^2 b^2 (x^2 - k)}{k^2}$$

d'où, par l'élimination de x entre les valeurs de X^2 et Z^2

$$Z^2 = \frac{a^2 b^2 \left(X^2 \frac{k^2}{q} - k\right)}{k^2}$$

c'est-à-dire

$$\frac{X^2}{q : k} - \frac{Z^2}{a^2 b^2 : k} = 1$$

équation d'une hyperbole de centre O, et de demi axe réel $\overline{OT} = \sqrt{\frac{q}{k}}$, comme nous l'avions exprimé plus haut.

L'autre demi axe, a la valeur $\frac{ab}{\sqrt{k}}$ qui peut, graphiquement, s'obtenir ainsi : Le produit ab représente l'aire du rectangle construit sur les deux demi axes $\overline{OA}$ et $\overline{OB}$; si l'on prend en OB, à partir de O, le segment $\overline{OV} = \overline{HJ} = \sqrt{k}$, et l'on joint ensuite V et A, en traçant la parallèle, BU, a VA, le segment obtenu $\overline{OU}$ (fig. 5) a, justement, la valeur $\frac{ab}{\sqrt{k}}$; il représente, donc, le demi axe non transverse de l'hyperbole. Dans la figure 5, l'hyperbole est supposée rabattue sur le plan de base autour de r; elle est indiquée par le trait pointillé.

12. Si les axes des coordonnées sont transportés parallèlement à eux mêmes, aucune modification ne se produirait relativement a la position de l'hyperbole; autre chose resulterait au contraire d'une rotation des axes : si les orientations de ces derniers coïncident avec celles des axes de l'ellipse, l'hyperbole appartiendra à l'un ou

l'autre des plans perpendiculaires à celui de base par les axes de coordonnées, et les axes de l'hyperbole auront même valeur que ceux de l'ellipse; un changement de ces orientations fait sortir l'hyperbole des plans en question et modifie la longueur des axes qui ne sont plus, par conséquent, égaux à ceux de l'ellipse.

13. Un raisonnement et un calcul équivalent nous conduirait à établir que, s'il s'agit le l'hyperbole

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2, \qquad a > b$$

x ayant des valeurs algébriques (réelles) et y pouvant prendre des valeurs vectorielles, le lieu est constitué par l'hyperbole courante du plan de base, et par une ellipse située dans le plan perpendiculaire χ, d'axe majeur $2a$ coïncidant avec l'axe transverse de l'hyperbole et d'axe mineur $2b$ (fig. 6).

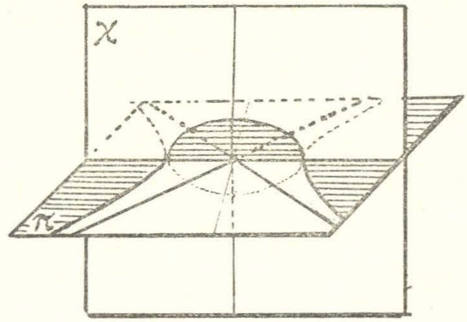

Figure 6

14. Si les axes des coordonnées ne coïncident pas avec ceux de l'hyperbole, il en résulte des formules analogues à celles dejà trouvées pour l'ellipse; il suffit d'y changer b^2 par $-b^2$.

La valeur $k = a^2 \cos^2 \theta - b^2 \sin^2 \theta$ peut s'obtenir aisément ainsi : Soit A un sommet de l'hyperbole; le projection orthogonale $\overline{OH}$ (fig. 7) du demi axe $\overline{OA}$ sur xx' a pour valeur $a \cos \theta$; la projection $\overline{OI}$ de l'autre axe $\overline{OB}$ vaut $b \sin \theta$; donc, si avec centre I et rayon $= \overline{OH}$ on coupe l'axe yy' en J; $\overline{OJ}$ résulte précisement avoir la longueur $\sqrt{k}$.

L'abscisse $\overline{OR}$ du point critique T, qui correspond à la valeur nulle du discriminant, résulte égale à $\pm \sqrt{k}$, c'est-à-dire a $\overline{OJ}$. Relativement à l'ordonnée $\overline{RT}$, elle est égale à $\pm \dfrac{\sin \theta \cos \theta \, (a^2 + b^2)}{\sqrt{k}} = \pm \dfrac{l}{\sqrt{k}}$, et on l'obtient en projetant un foyer F de l'hyperbole, en C et D sur les axes des coordonnées : $\overline{OF}^2$ valant $a^2 + b^2$, le numerateur de $\overline{RT}$ est la valeur de l'aire du rectangle OCFD; donc si $\overline{OE} = \sqrt{k} = \overline{OJ}$, en joignant E à C, puis traçant la parallèle DG à EC il resultera : $\overline{OG} = \overline{RT}$. Les points T sont, par conséquent, trouvés, de même que la droite r qui joint O à T.

Pour tout point Q d'abscisse arithmétiquement supérieure à $\overline{OR}$, les ordonnées correspondantes s'obtiennent par l'addition, de l'ordonnée $y_1 = \overline{QS}$ de r, avec les deux vecteurs $y_2 = \pm \overline{SP}$. L'on obtient ainsi les points P_1 et P_2 de l'hyperbole de base. Quant aux points d'abscisses moindres que $\overline{OR}$, par exemple le point L (fig. 7), il fau-

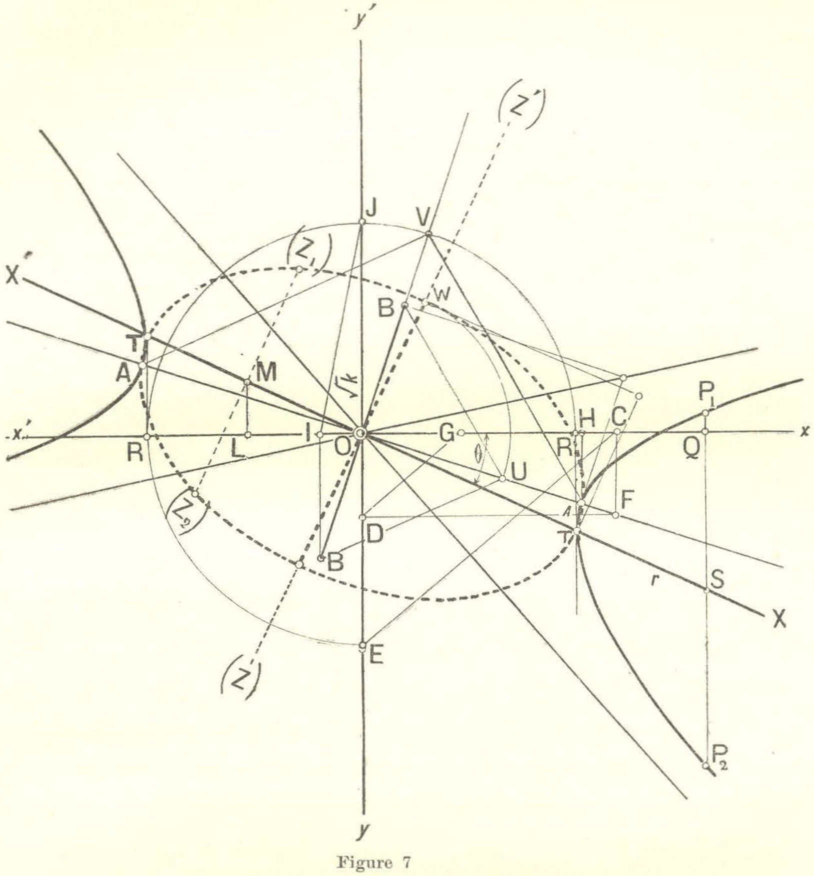

Figure 7

dra ajouter à l'ordonnée $y_1 = \overline{LM}$ de r, les deux vecteurs $y_2 = \pm \overline{MZ}$ dirigés dans le plan perpendiculaire à π. Ces valeurs sont :

$$y_2 = \pm \frac{ab\sqrt{-x^2 + (a^2 \cos^2 \theta - b^2 \sin^2 \theta)}}{a^2 \cos^2 \theta - b^2 \sin^2 \theta}.$$

Le lieu des points ainsi obtenus, est une ellipse qui, dans la figure 7, se trouve rabattue autour de r et indiquée par des traits pointillés. La démonstration est identique à celle faite précédemment. Si on la rapporte à des axes d'origine O, l'axe des X suivant r, et l'axe des Z suivant la perpendiculaire au plan π [rabattue en (Z)] on obtient, comme équation de la courbe :

$$\frac{X^2}{q : k} + \frac{Z^2}{a^2b^2 : k} = 1.$$

De sorte que l'ellipse a pour centre, O, et pour valeur des demi-axes : $\sqrt{\frac{q}{k}}, \frac{ab}{\sqrt{k}}$; le premier est égal au segment $\overline{OT}$. L'autre s'obtient, graphiquement, comme pour le cas antérieur, en prenant $\overline{OV} = \overline{OJ}$, puis joignant V à A, et traçant, par B, la parallèle BU à VA jusqu'à couper OA; $\overline{OU}$ est le segment cherché, égal au demi axe $\overline{OW}$.

15. Finalement, s'il s'agissait d'une parabole, dont l'axe se trouve être l'axe des x, le sommet coïncidant avec l'origine O, p étant le double de la distance du sommet au foyer, nous aurions l'équation $y^2 = 2px$. Pour des valeurs positives de x, l'équation représentera la parabole graphique du plan de base, et pour des valeurs negatives de x, une autre parabole identique, de même axe et sommet, mais située dans le plan χ perpendiculaire à π comme l'indique la figure 8.

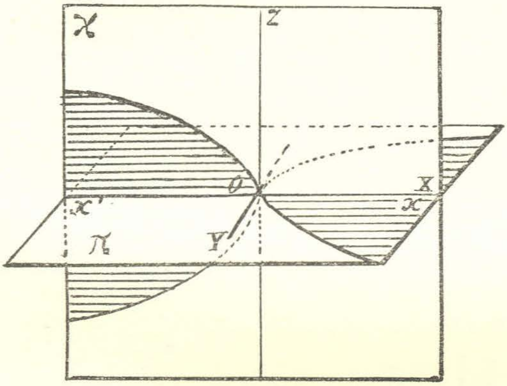

Figure 8

Si la directions de l'axe des x, relativement à celui de la parabole, forme un angle θ, nous aurons :

$$y = -\frac{p \operatorname{tang} \theta}{\cos \theta} - x \operatorname{tang} \theta \pm \frac{\sqrt{2px \cos \theta + p^2 \sin^2 \theta}}{\cos^2 \theta} = y_1 \pm y_2.$$

La composante y_1 représente une droite parallèle à l'axe de la parabole à la distance p tang θ, valeur qui s'obtient graphiquement (fig. 9) en projetant le segment $\overline{OP} = p$, en $\overline{OB}$, parallèlement à xx' sur la perpendiculaire, par O, à l'axe de la parabole; $\overline{OB}$ est la distance de r à l'axe de la parabole. Quant aux composantes $\pm y_2$, il faudra les prendre dans le plan de base si le discriminant est positif, et dans le plan perpendiculaire lorqu'il est négatif. S'il s'évanouit, on a $y_2 = 0$, et l'on obtient les points critiques T, d'abscisse

$$\overline{OR} = -\frac{p}{2} \operatorname{tang} \theta \sin \theta$$

valeur qui s'obtient graphiquement en projetant F en G (fig. 9) sur

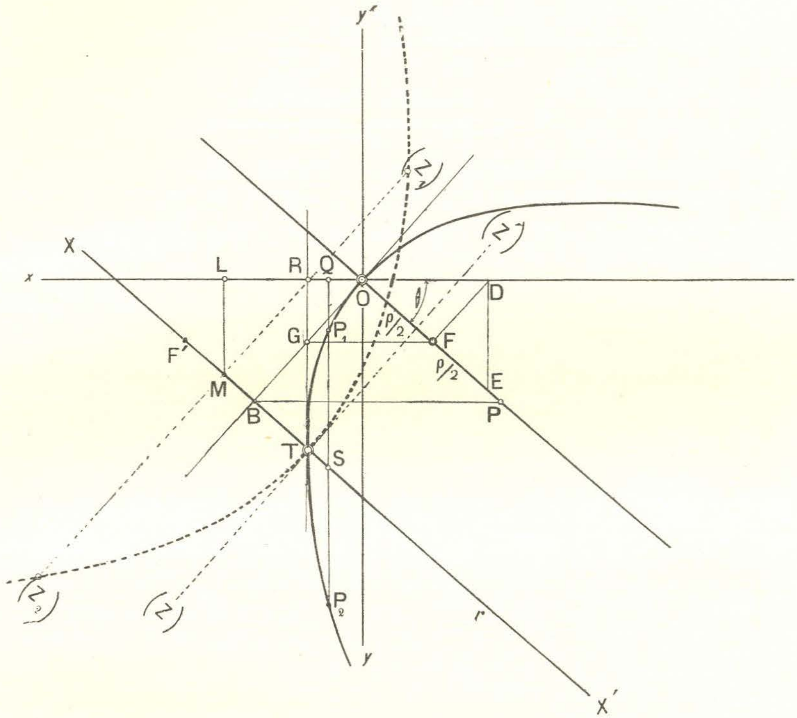

Figure 9

la perpendiculaire à l'axe de la parabole par le sommet O, l'abscisse de G est celle $\overline{OR}$, de T.

Pour tout point Q à droite de R (fig. 9), le point du lieu s'obtient en ajoutant à l'ordonnée $\overline{QS} = y$, de r, les ordonnées $\pm y_2 = \pm \overline{SP}$, dans le plan du dessin. On obtient ainsi les points P_1 et P_2 de la parabole graphique du plan de base; mais pour tout point L a gauche de R, y faudra faire la somme vectorielle de l'ordonnée $\overline{LM}$, correspondante de r, avec les deux vecteurs $\pm \overline{MZ}$ perpendiculaires au plan π. Le lieu ainsi obtenu est une autre parabole (qui a été rabattue autour de r, et indiquée en traits pointillés dans le plan du dessin).

16. Pour determiner le paramètre de cette nouvelle parabole, nous la rapporterons au système d'axes d'origine T, l'axe XX′, suivant r; et l'axe Z, suivant la perpendiculaire à r par T. Nous aurons alors, si $x_0 = \overline{\mathrm{OR}}$:

$$\mathrm{X} = \overline{\mathrm{TM}} = \frac{x - x_0}{\cos\theta}$$

∴

$$x = \mathrm{X}\cos\theta + x_0 = \mathrm{X}\cos\theta - \frac{p}{2}\operatorname{tang}\theta\sin\theta$$

$$\mathrm{Z}^2 = \pm\frac{2px\cos\theta + p^2\sin^2\theta}{\cos^4\theta}.$$

Si l'on remplace dans cette dernière, X par sa valeur tirée de la première, on obtient, en réduisant :

$$\mathrm{Z}^2 = \frac{2p}{\cos^2\theta}\mathrm{X},$$

ce qui indique que le paramètre de cette parabole est celui de la parabole du plan de base, divisé par $\cos^2\theta$. On obtient graphiquement la distance focale sans aucune difficulté $\left(\overline{\mathrm{TF}'} = \overline{\mathrm{OE}}\right)$.

II

LES POINTS CYCLIQUES, LES DROITES ISOTROPES. LES ELLIPSES SEMBLABLES ET LES ELLIPSES HOMOFOCALES

17. Nous sommes maintenant à même d'indiquer comment on peut graphiquement représenter certaines propriétés analytiques d'une circonférence, c'est-à-dire, du lieu représenté par l'équation

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$$

où x à une valeur algébrique (au sens strict), y étant un vecteur, comme il a été expliqué plus haut; m, n et r seront également supposés algébriques au sens strict.

18. Tous les lieux représentés par ces équations, pour les valeurs quelconques de m, n et r, se composent, d'abord, de toutes les circonférences du plan, (courbes capables d'être tracées par un compas), le centre étant le point de coordonnées m et n, et le rayon étant r; mais chacune de ces courbes doit être acompagnée d'une hyperbole équila-

tère comme il a été indiqué plus haut (fig. 3); les demi-axes de ces hyperboles ont la valeur r, et elles sont toutes situées dans des plans perpendiculaires au plan de base par les droites parallèles à celle des x qui passent par les centres respectifs de ces circonférences lesquels sont également les centres des l'hyperboles correspondantes. Les asymptotes de ces hyperboles sont à 45°, et toutes parallèles à l'une ou à l'autre des deux directions ainsi déterminées. On peut, par conséquent, dire que, si par l'origine des coordonnées, l'on trace, dans le plan perpendiculaire à celui de base par l'axe des x, deux droites a 45°, les points à l'infini (ou « impropres ») de ces droites, sont communs a toutes les hyperboles, c'est-à-dire, aux lieux représentatifs de l'équation des circonférences (au sens analytique défini plus haut). Ces points communs ont pour coordonnées : $x = \infty$, $y = \pm i \infty$. Ce sont les *points* dit *cycliques* du plan relativement au système de coordonnées établi. Si l'on change la direction des axes, les points en question changeront aussi, fait qui met en évidence le caractère entièrement analytique de ces points. Ils dépendent, en effet, du concept de « direction », concept qui, graphiquement, ne dépend que de la direction fixée comme positive, laquelle est arbitraire. La phrase paradoxale : *toutes les circonférences ont deux points imaginaires communs à l'infini, nommés les points cycliques du plan,* se trouve ainsi graphiquement expliquée. Quant aux droites *isotropes,* ce sont celles parallèles aux asymptotes des hyperboles correspondantes ; elles joignent un point quelconque du plan de base avec les points cycliques. Que celà soit une propriété caractéristique des circonférences, ressort, en effet, de ce que l'on ne pourrait en dire de même pour les ellipses, c'est-à-dire, pour les lieux qui répondent à l'équation du numéro 7. Car ces lieux se composent de toutes les ellipses du plan de base et des hyperboles correspondantes, mais ces dernières (fig. 5) ne sont plus dans dès plans parallèles, ni leurs asymptotes sont également inclinées. Il ne pourrait se produire un cas analogue à celui de la circonférence que si les demi-axes a et b ($a > b$) des ellipses considérées satisfaisaient à la condition d'être constant le rapport $a : b$. Cette observation permet de dire que toutes les ellipses semblables, qui ont les grands axes (et par tant, les petits) parallèles, ont deux points communs à l'infini. Et on pourrait en dire de même pour les hyperboles, puisque dans ce cas, leurs asymptotes seraient parallèles.

20. Quant aux paraboles, comme leurs courbes complémentaires sont aussi des paraboles égales à celle du plan de base, et ayant leurs axes parallèles, il faudrait que les paraboles du plan de base eussent

leurs axes parallèles et de même paramètre, c'est-à-dire, qu'elles fussent égales entre elles. Dans ce cas elles auraient évidemment leurs sommets à l'infini communs.

21. Il est également facile de donner un sens graphique à l'expression : *toutes les circonférences ont deux asymptotes imaginaires qui leur sont tangentes aux points cycliques, et qui passent par leurs centres.* Au surplus, si les circonférences du plan de base sont concentriques, les hyperboles complémentaires ont mêmes asymptotes ; c'est-à-dire, que les lieux son tangents aux points cycliques, et qu'ils ont, non seulement ces deux points communs, mais encore communes leurs tangentes en ces points (droites isotropes), ce qui représente quatre éléments : ils ne sauraient donc en avoir d'autres communs. Si, au contraire, les circonférences ne sont pas concentriques, elles peuvent avoir deux autres points communs en dehors des points cycliques ; ces points peuvent se trouver sur les circonférences du plan de base. ou sur les hyperboles complémentaires, sans compter les cas limites. Et réciproquement.

22. Nous avons déjà fait observer (n° 4), que si le rayon de la circonférence devient nul, le lieu se réduit a un point dans le plan de base mais, en fait, aux droites isotropes qui passent par ce point. Ceci explique, graphiquement, la proposition : *une circonférence de rayon nul coupe toute autre circonférence concentrique exclusivement aux points cycliques.*

23. Si des ellipses sont semblables, concentriques, d'axes correspondants de même directions — directions que nous prendrons aussi comme celles des axes de coordonnées, les hyperboles complémentaires du lieu du plan de base ont mêmes asymptotes — de sorte que ces ellipses ont, non seulement communs les points à l'infini, mais aussi les tangentes en ces points ; elles ne peuvent avoir donc d'autres points communs.

24. La plupart des propriétés d'aspect entièrement paradoxal quand on ne considère que le plan de base, deviennent d'une évidence très grande quand on emploie la représentation graphique indiquée, et même, cette dernière signale quelques erreurs que l'on commet des fois sur ces questions, erreurs qui passent inaperçues, justement parce que l'on n'a pas une représentation visuelle. Ainsi, l'on dit quelque fois que, si l'on fait tourner le plan de base autour d'un axe perpendiculaire, en laissant invariable la direction des axes des coordonnées, les directions des points cycliques ne changent pas ; celà est, en effet, une conséquence de ce que les hyperboles complémen-

taires des circonférences du plan de base, se trouvant dans des plans perpendiculaires à ce dernier par l'axe des x ou par des parallèles à cet axe, ont toujours leurs asymptotes parallèles. Mais prétendre, par là, que ces directions invariables des droites isotropes sont des *directions absolues* du plan, c'est commettre une impropriété, puisque ces directions changent avec celle de l'axe des x, laquelle peut être quelconque. Du moins, il faut se mettre bien d'accord sur le sens a donner aux expressions que l'on emploie.

25. On dit, quelquefois aussi, qu'un changement des axes des coordonnées de change pas les coordonnées des points cycliques, lesquelles sont toujours : $x = \infty$, $y = \pm i \infty$. Mais, justement, conserver mêmes coordonnées dans un changement d'axes, signifie changer les points ou les directions correspondantes. On peut dire donc qu'il y a impropriété dans cette phrase : *les points cycliques sont des invariants absolus pour toute transformation de coordonnées.* On devrait dire, en tout cas, non « les points cycliques » mais bien : « les coordonnées des points cycliques ». En réalité, ce qu'il y a dans tout ceci d'invariable, c'est, pour notre représentation, l'angle de 45° que les asymptotes des hyperboles complémentaires des circonférences du plan de base, situées dans des plans perpendiculaires à ce dernier, forment avec lui.

26. On dit aussi souvent que : *pour faire coïncider deux figures symétriques (par rapport à une droite) d'un plan il faut interchanger les points cycliques de ce plan.* Or, il est évident que cette coïncidence s'obtient en faisant tourner le demi plan qui se trouve d'un côté de l'axe de symétrie jusqu'à l'appliquer sur l'autre et réciproquement. Cette opération se comprend sans besoin de faire intervenir les points cycliques mais si on veut les faire intervenir, il faut observer que la rotation indiquée ne peut produire l'interchangement des points cycliques que si l'axe de symétrie est parallèle à l'axe des x, ou coïncide avec lui.

27. La proposition : *toute courbe de deuxième degré qui passe par un des points cycliques doit passer par l'autre et être ainsi une circonférence,* proposition qui se démontre généralement en faisant constater que, si l'équation générale des coniques est satisfaite par les coordonnées de l'un des points cycliques, elle résulte, par ce seul fait, satisfaite par celles de l'autre, peut être démontrée sans aucune formule en se représentant les coniques comme nous l'avons graphiquement indiqué. Il n'y a évidemment que la circonférence qui répond à la condition établie. Mais la conclusion que l'on en tire, quand on dit que ce fait explique *pourquoi la circonférence est déterminée par seulement*

trois points, au lieu de cinq (les autres deux étant des points cycliques) semble plutôt artificieuse, puisque cette propriété découle immédiatement de la forme de son équation.

28. Nous avons vu plus haut que les circonférences de rayon nul sont représentées par les deux droites isotropes passant les centres respectifs; mais exprimer ce fait en disant que *la distance des points cycliques à un point quelconque du plan est nulle* c'est entrer dans un terrain entièrement différent qui exige la définition préalable de la notion de distance comme extension de la notion vulgaire de ce concept. Nous traiterons cette question a son temps et lieu.

Avant de terminer ce chapitre, il convient de faire voir par quelques exemples, l'utilité que peut rendre la représentation graphique indiquée. Nous considérons certaines propriétés des foyers des coniques.

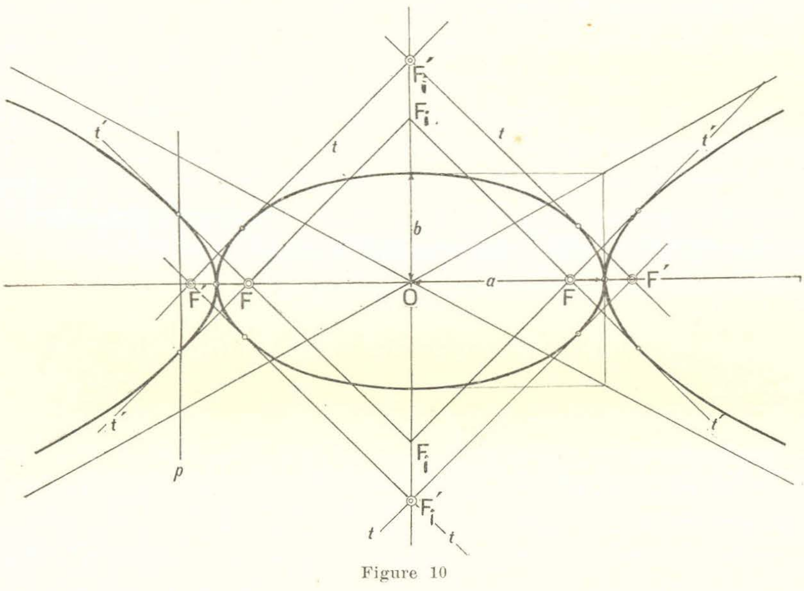

Figure 10

29. Soit (fig. 10) une ellipse et une hyperbole coaxielles, de grand axe $2a$ et de petit axe $2b$. Si on trace les tangentes inclinées à 45° par rapport aux axes, celles t', de l'hyperbole passent par les foyers F de l'éllipse, et celles t de l'ellipse, par les foyers F', de l'hyperbole (1).

(1) Si l'on écrit, en effet, la condition $\frac{dy}{dx} = \pm 1$ qui correspond aux tangentes a 45°, on peut obtenir les coordonnées des points de contact en éliminant x et y

Ceci dit, relevons une des courbes autour de l'axe des x jusqu'à la placer dans le plan perpendiculaire a celui de base (fig. 11 et 12). Les tangentes t ou t' a la courbe relevée continueront a passer par les foyers de la courbe fixe; mais la figure ainsi obtenue correspond aux figures 4 (où 5), c'est-à-dire, aux représentations graphiques de lieux

$$b^2x^2 \pm a^2y^2 = a^2b^2.$$

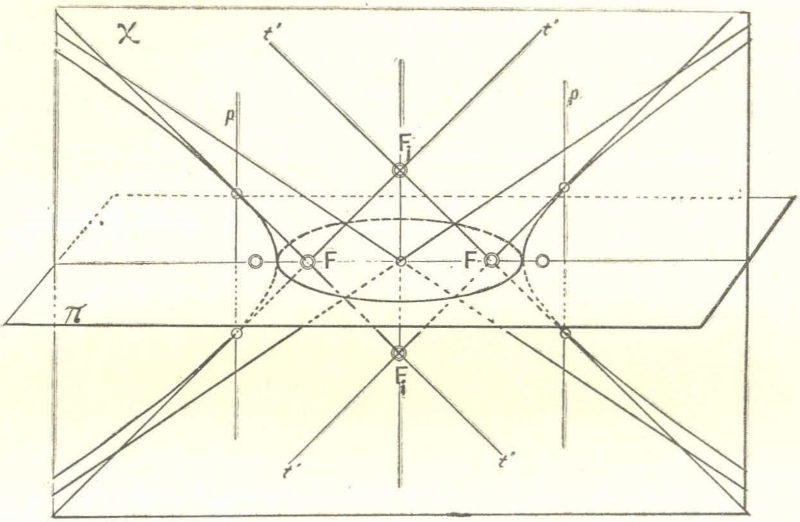

Figure 11

Les quatre tangentes t ou t' a la courbe relevée resultent (étant a 45°) parallèles aux droites dites isotropes; ceci donne une représenta-

entre l'équation ainsi obtenue et celle de la conique donnée. On obtient ainsi :

$$x_0 = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \mp b^2}}; \qquad y_0 = \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2 \mp b^2}}.$$

Le point où cette tangente coupe l'axe des x a pour abscisse

$$x_0 - y_0 = \pm \sqrt{a^2 \mp b^2} = \pm c,$$

c'est-à-dire, précisement, les abscisses des foyers de l'autre courbe.

S'il s'agit de la parabole $y^2 = 2px$, la condition $\frac{dy}{dx} = 1$, fournit, comme coordonnées du point de tangence : $x_0 = -\frac{p}{2}$, $y_0 = p$; c'est-à-dire, l'abscisse et l'ordonnée du foyer, de sorte que les deux paraboles étant idéntiques, l'une a droite, l'autre a gauche, la propriété se trouve verifiée.

tion graphique a la phrase : *les foyers d'une conique sont les points d'intersection des tangentes à la courbe considerée, traceés par les points cycliques du plan.* Comme ces mêmes tangentes à 45° à la courbe relevée se coupent, dans le cas de l'ellipse et de l'hyperbole, en deux autres points F_i, appartenant a l'axe perpendiculaire au plan de base, a la même distance du centre que les foyers F, F′ ont en tire une explication de ce qu'il faut entendre par les foyers dits «imaginaires» de ces courbes; points qui ont mêmes coordonnées que les foyers véritables ou «réels» mais affectés du signe de l'imaginaire, qui, pour notre représentation vectorielle, se rapporte a un vecteur perpendiculaire au plan de base par le centre de la courbe.

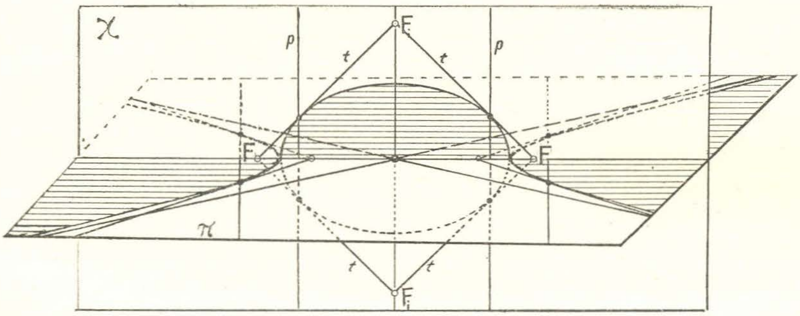

Figure 12

30. Dans le cas de la parabole, il n'y aurait qu'une paire de tangentes a 45° et, par conséquent, pas de foyers imaginaires.

31. Considerons, maintenant, deux ellipses ou deux hyperboles homofocales; elles ne se coupent pas dans le plan de base. Au contraire, une ellipse et une hyperbole homofocales se coupent toujours dans le plan de base, et elles le font même orthogonalement (1). Dans

(1) En effet, si l'ellipse $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ et l'hyperbole $\frac{X^2}{a'^2} - \frac{Y^2}{b'^2} = 1$ sont homofocales, on doit avoir, $a^2 - b^2 = a'^2 + b'^2$ de sorte que, en soustrayant on a :

$$\frac{X^2}{a^2a'^2} - \frac{Y^2}{b^2b'^2} = 0;$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{X}{aa'} + \frac{Y}{bb'}\right)\left(\frac{X}{aa'} - \frac{Y}{bb'}\right) = 0,$$

condition qui doit être satisfaite par les points d'intersection cherchés (X_0, Y_0) s'ils existent dans le plan de base. Mais le lieu exprimé par la dernière egalité le premier cas, si les courbes ne se coupent pas dans le plan de base les courbes complémentaires le font sûrement.

En effet, soient les deux ellipses

$$\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1, \qquad \frac{x^2}{a_2^2}+\frac{y^2}{b_2^2}=1.$$

Les équations des courbes complémentaires, dans leur plan, sont :

$$\frac{X^2}{a_1^2}-\frac{Z^2}{b_1^2}=1, \tag{a}$$

$$\frac{X^2}{a_2^2}-\frac{Z^2}{b_2^2}=1. \tag{b}$$

Par la condition d'homofocalité supposée, nous avons :

$$a_1^2-b_1^2=a_2^2-b_2^2=c^2. \tag{c}$$

Les coordonnées x_0, z_0, des points d'intersection, s'ils existent, doivent satisfaire a la condition obtenue en soustrayant (a) de (b), c'est-à-dire, en tenant compte de (c)

$$\frac{X_0^2}{a_1^2a_2^2}-\frac{Z_0^2}{b_1^2b_2^2}=0 \tag{d}$$

ce qui revient a établir que ces points d'intersection existent en effet, et que les courbes se coupent orthogonalement (voyez la note au bas de la page). Le lieu indiqué par (d) (en supposant que x_0, y_0 sont des coordonnées courantes) est constitué pas deux droites symétriques contenant l'origine. Les coordonnées de leurs points d'intersection avec la courbe ont pour valeur :

$$X_0=\pm\frac{a_1a_2}{c}, \qquad Z=\pm\frac{b_1b_2}{c}.$$

est constitué par deux droites symétriques contenant l'origine O. Les équations des tangentes aux courbes, en chacun de ces points sont :

$$\frac{XX_0}{a^2}+\frac{YY_0}{b^2}=1; \qquad \frac{XX_0}{a'^2}-\frac{YY_0}{b'^2}=1.$$

L'équation $\frac{X_0^2}{a^2a'^2}-\frac{Y_0^2}{b^2b'^2}=0$ indique que ces deux tangentes sont perpendiculaires. S'il s'agissait, au contraire, de deux ellipses (ou de deux hyperboles) homofocales, au lieu d'avoir $\frac{X^2}{a^2a'^2}-\frac{Y^2}{b^2b'^2}=0$ nous aurions $\frac{X^2}{a^2a'^2}+\frac{Y^2}{b^2b'^2}=0$, qui ne peut être satisfaite par aucune droite du plan puisqu'il s'agit de la somme nulle de deux carrés.

Les tangentes aux courbes en ces point ont pour équations :

$$\frac{XX_0}{a_1^2} + \frac{ZZ_0}{b_1^2} = 1; \qquad \frac{XX_0}{a_2^2} - \frac{ZZ_0}{b_2^2} = 1.$$

Et l'égalité (d) indique que ces tangentes sont orthogonales.

32. Le sens graphique de la phrase : *deux coniques homofocales se coupent toujours orthogonalement,* résulte établi. En realité elles ne se coupent dans le plan de base que quand elles sont de nature différente (ellipse et hyperbole); dans le cas contraire, elle le font dans le plan perpendiculaire a celui de base par l'axe des x.

33. On dit aussi que *donner un foyer c'est établir deux conditions, puisque celà signifie donner deux tangentes au lieu, soient : celles qui unissent le foyer en question avec les points cycliques du plan.* Ce langage est inadmissible dans la géométrie synthétique, mais le fait en soi est exact, car si au foyer en question on ajoute la circonférence directrice de la conique, cette dernière résulte déterminée (1). Or, comme une circonférence se détermine par trois éléments, le foyer implique, donc, la connaissance de deux autres. Il n'est par conséquent pas nécessaire de faire, pour le cas, intervenir les éléments «imaginaires» du plan, comme l'on dit en employant le langage courant (ou les éléments hors du plan, selon notre représentation). Maintenant, si l'on veut se placer au point de vue de la géométrie analytique vectorielle, la phrase signalée plus haut peut être considerée correcte quoique tant soit peu précise, car la direction des points cycliques dépend des axes des coordonnées. Il faudrait alors éclaircir. En observant les figures 4 a 7, on se rend aisément compte que, donner la courbe du plan de base, c'est donner aussi sa courbe complémentaire pour des axes de coordonnées qui coïncideraient avec ceux de la conique. Si l'on donne seulement un foyer, cette direction est inconnue et il faut commencer par la déterminer en employant provisoirement des axes des coordonnées situés d'une façon quelconque dans le plan. Si θ est l'angle que forme, avec l'axe des x, le grand axe de la conique, et si m et n sont le coordonnées du centre, l'équation de la courbe est :

$$\pm b^2 [(x - m)\cos\theta - (y - n)\sin\theta]^2 + \\ + a^2 [(x - m)\sin\theta + (y - n)\cos\theta]^2 = \pm a^2 b^2 \quad (a)$$

équation qui contient cinq quantités inconnues : a, b, m, n, θ.

(1) Une ellipse ou une hyperbole.

Considerons alors les figures 5 et 7 où le courbes en traits continus sont celles du plan de base, et celles en traits pointillés les courbes complémentaires rabattues. Connaître un foyer signifie connaître les coordonnées d'un point des tangentes a la courbe rabattue situées a 45° relativement a l'axe consideré de la conique. Si l'équation de la courbe du plan de base correspond aux signes supérieurs de (a), celle de la courbe rabattue correspond aux signes inférieurs et vice-versa (1). Puisque les tangentes en question forment avec notre axe provisoire des x des angles de $45 + \theta$ et $45 - \theta$; il suffira d'établir, relativement a la courbe rabattue, la condition :

$$\frac{dy}{dx} = \pm \operatorname{tang}(45 - \theta)$$

ce qui implique l'existence de trois équations entre les cinq inconnues. Voilà, en rigueur, pourquoi, sous le point de vue des points cycliques, la connaissance du foyer représente deux conditions. Nous aurions une démonstration également simple s'il s'agissait de la parabole; seulement, dans ce cas, la courbe devant être tangente a la droite de l'infini, nous aurions trois conditions. Synthétiquement, nous pourrions dire que, du moment que quand on connait la directrice de la parabole, et son foyer, la parabole, par la définition élémentaire de la courbe est detérminée; et du moment aussi que, connaître une droite signifie établir deux conditions, y en ressort qué la connaissance du foyer implique donner trois conditions.

34. Connaître deux foyers suppose donc quatre conditions; connaître en plus un point, c'est déterminer la conique (2) mais, pour établir ce résultat, il n'est pas nécessaire d'avoir recours aux points cycliques, ressource du reste passablement artificieuse; on peut se contenter des propriétés les plus élémentaires de ces courbes. D'abord, si l'on donne deux foyers, il ne peut s'agir que de l'ellipse ou de l'hyperbole; donner encore un point, c'est établir la valeur de la somme ou de la différence constante des deux vecteurs qui unissent un point du lieu aux foyers, c'est-à-dire, déterminer la conique (ellipse ou hyperbole).

Tout ceci est entièrement élémentaire, mais nous avons exprimé notre désir de faire, en passant, une œuvre de vulgarisation.

(1) Il y aura donc deux solutions selon que le foyer donné soit considéré comme appartenant a une ellipse ou a une hyperbole.

(2) Il y a deux solutions selon que le foyer donné soit consideré comme appartenant a une ellipse ou a une hyperbole.

Voici, pour finir, une autre des propriétés paradoxales des foyers, qui «saute aux yeux» dans notre représentation graphique.

35. *Un foyer est (ou peut être considéré comme) une circonférence de rayon nul tangente a la conique correspondante en deux points imaginaires de la directrice.*

Malgré qu'il serait plus logique de laisser ce théorème pour être traité a la suite du chapitre ou l'on généralise la représentation graphique envisagée, on peut l'exposer ici de la façon suivante.

Considerons la fonction linéaire :

$$px + qy + c = 0$$

qui, dans le plan de base, représente une droite quelconque. Si x et y peuvent être des vecteurs, nous verrons plus tard que le lieu déterminé par l'équation peut être représenté au moyen d'un plan coté; maintenant, si nous voulons simplement représenter la fonction linéaire particulière

$$x = c \qquad (c \text{ étant «réel»})$$

qui, dans le plan de base, représente une droite parallèle a l'axe de y a la distance c, on peut alors observer que, qu'elle que soit la valeur de y, même vectorielle, le lieu représenté par l'équation est un plan parallèle a YOZ, a la distance c de l'origine.

Nous savons d'ailleurs que, si dans $x^2 + y^2 = r^2$ on fait $r = 0$, le lieu représenté (x étant «réel») se reduit, dans le plan de base π, a un point, et dans l'autre plan χ, a deux droites qui sont les bissectrices des angles droits que forment entre eux les axes des X et des Z (voyez n° 4). Ceci établi ou rappelé, considerons une ellipse représentée par l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Le lieu se compose de l'ellipse du plan de base, dont l'équation est $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ et de l'hyperbole complémentaire dont l'équation est $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Z^2}{b^2} = 1$. Les droites dont les équations sont

$$x = \pm \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \pm \frac{a^2}{c},$$

représentent ici des plans perpendiculaires a celui de base tracés par les directrices de l'ellipse, c'est à-dire, par les polaires des foyers considérés (fig. 11 et 12). Une circonférence de rayon nul et de centre F, est representée par les tangentes, t', a l'hyperbole complémentaire par F puisque, comme nous l'avons vu précédemment, les coordonnées, X_0, des points de contact, sont précisément $\pm \frac{a^2}{c}$. La phrase paradoxale citée acquiert une signification, car on déduit du raisonnement fait que la directrice de la courbe est représentée par un plan; que le foyer, circonférence de rayon nul, est constitué par deux droites, et que la courbe tangente est l'hyperbole complémentaire de l'ellipse du plan de base. On en dirait de même quand la courbe de ce dernier plan est une hyperbole ou une parabole.

On entrevoit également une interprétation de la théorie des poles et des polaires quand il est impossible de tracer des tangentes a la courbe du plan de base. Par exemple, pour les foyers, ces tangentes devront être tracées a la courbe complémentaire, et en unissant les points de contact on obtient le point de la directrice situé sur l'axe. Mais n'anticipons pas.